PART3　鈍角の三角比

3　[1]　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

[2]　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3)　$\sin\theta-\cos\theta$　　(4)　$\sin\theta$，$\cos\theta$

Point Pickup

[1]　三角比の値の符号は

θ が鋭角のとき　$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$，$\tan\theta>0$

θ が鈍角のとき　$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$

[2]　$\sin\theta+\cos\theta=k$ の形の等式は，両辺を 2 乗し，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用することで，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めることができる。

第 8 講　PART3 確認問題

1　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値として，最も適当なものを選べ。

$(\cos\theta,\ \tan\theta) =$ [ア]

① $\left(\dfrac{4}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)$

② $\left(-\dfrac{4}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)$

③ $\left(\dfrac{4}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{4}\right),\ \left(-\dfrac{4}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)$

④ $\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$

⑤ $\left(-\dfrac{6}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$

⑥ $\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right),\ \left(-\dfrac{6}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$

2 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta=\dfrac{5}{12}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値として，最も適当なものを選べ。

$(\sin\theta,\ \cos\theta)=$ [イ]

① $\left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{12}{13}\right)$

② $\left(-\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)$

③ $\left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{12}{13}\right),\ \left(-\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)$

④ $\left(\dfrac{12}{13},\ \dfrac{5}{13}\right)$

⑤ $\left(-\dfrac{12}{13},\ -\dfrac{5}{13}\right)$

⑥ $\left(\dfrac{12}{13},\ \dfrac{5}{13}\right),\ \left(-\dfrac{12}{13},\ -\dfrac{5}{13}\right)$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ のとき，次の値を求めよ。

3 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケ}}$

4 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$，

$\sin\theta=\dfrac{\boxed{ス}+\sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$，$\cos\theta=\dfrac{\boxed{ス}-\sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$

[MEMO]

PART3　鈍角の三角比

3　[1]　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

[2]　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

(3)　$\sin\theta - \cos\theta$　　(4)　$\sin\theta$，$\cos\theta$

[1]　(1)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = \dfrac{25}{169}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，$\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{5}{13},\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\frac{5}{13},\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{13} \div \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{5}$$

よって　$(\cos\theta,\ \tan\theta) = \left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{12}{5}\right),\ \left(-\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{5}\right)$

(2)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$ より　$\cos^2\theta = \dfrac{4}{5}$

$\tan\theta = \dfrac{1}{2} > 0$ より，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるから　$\cos\theta > 0$

よって

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

[2]　(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を 2 乗して

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

よって

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

(3)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$

(1)より　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}<0$ であり，

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より　$\sin\theta>0$ であるから　$\cos\theta<0$

したがって，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …… ①，　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …… ②

(① + ②) ÷ 2 より　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(① − ②) ÷ 2 より　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [A]

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{13}}{7}\right)^2=\frac{36}{49}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，$\cos\theta \geqq 0$ であるから [B]

$$\cos\theta=\frac{6}{7}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{13}}{7}\div\frac{6}{7}=\frac{\sqrt{13}}{6}$$ [A]

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta < 0$ であるから [B]

$$\cos\theta=-\frac{6}{7}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{13}}{7}\div\left(-\frac{6}{7}\right)=-\frac{\sqrt{13}}{6}$$ [A]

よって

$$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\boldsymbol{\frac{6}{7}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{6}}\right),\ \left(\boldsymbol{-\frac{6}{7}},\ \boldsymbol{-\frac{\sqrt{13}}{6}}\right)$$

[A]　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

[B]　三角比の符号

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
$\sin\theta$	0	＋	1	＋	0
$\cos\theta$	1	＋	0	－	－1
$\tan\theta$	0	＋	なし	－	0

2 [正解] イ：①

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より [A]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{144+25}{144}=\frac{169}{144}=\left(\frac{13}{12}\right)^2$$

ゆえに　$\cos^2\theta=\left(\dfrac{12}{13}\right)^2$

$\tan\theta=\dfrac{5}{12}>0$より，$0°<\theta<90°$ であるから [B]

$$\cos\theta>0$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{12}{13}=\dfrac{5}{13}$ [A]

したがって　$(\sin\theta,\ \cos\theta)=\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{13}},\ \boldsymbol{\dfrac{12}{13}}\right)$

3 [正解] ウエ：-4，オ：9，カキ：13，クケ：27

[解説]

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を２乗して [C]

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{4}{9}}$

次に　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1+12}{27}=\boldsymbol{\frac{13}{27}}$$

> [C]　$\sin\theta+\cos\theta=k$ の形の等式は両辺を２乗し，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用することで，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めることができる。
> 他の式の値は，和 $\sin\theta+\cos\theta$ と積 $\sin\theta\cos\theta$ の値を利用することを考える。

4 **[正解]** コサ：17，シ：3，ス：1，セソ：17，タ：6

[解説]

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}\quad\cdots\cdots(*)$$

であるから

$$\begin{aligned}&(\sin\theta-\cos\theta)^2\\&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{9+8}{9}\\&=\frac{17}{9}\quad\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ では $\sin\theta>0$ であるから，$(*)$より

$$\cos\theta<0$$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta>0$ [D]

[D]　$\sin\theta-\cos\theta$ の符号に注意。

$(**)$より　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

これと $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の連立方程式として解くと

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{6},\quad\cos\theta=\frac{1-\sqrt{17}}{6}$$